第 2 节 复合函数不等式问题（★★★）

强化训练

1．（★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x<1\\x^3+x,x\ge 1\end{cases}$，则不等式 $f(f(x))<2$ 的解集为_____.

答案： $(-\infty,1-\ln 2)$

解析： 先将 $f(f(x))<2$ 内层的 $f(x)$ 换元，化整为零，设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))<2$ 即为 $f(t)<2$，函数 $y=f(t)$ 的图象好画，所以结合图象来看不等式 $f(t)<2$ 的解，

如图 1，由图可知 $f(t)<2\Leftrightarrow t<1$，所以 $f(x)<1$，再结合图象来看不等式 $f(x)<1$ 的解，

如图 2，$\begin{cases}y=1\\y=2e^{x-1}\end{cases}\Rightarrow x=1-\ln 2$，由图可知 $f(x)<1\Leftrightarrow x<1-\ln 2$.

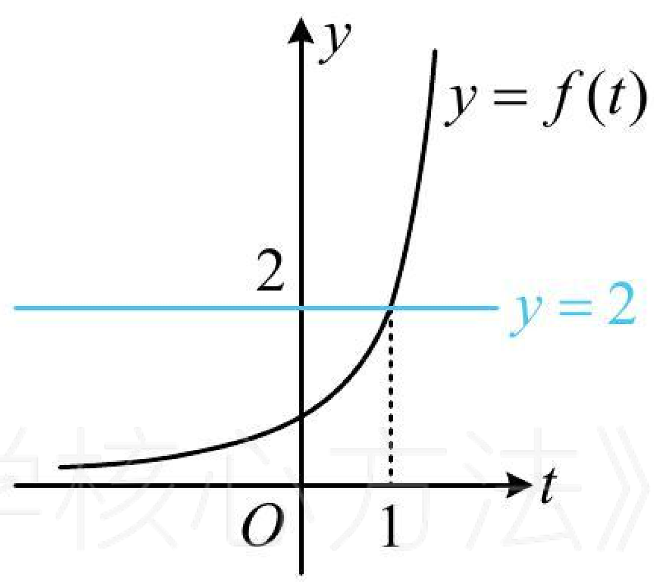

图1

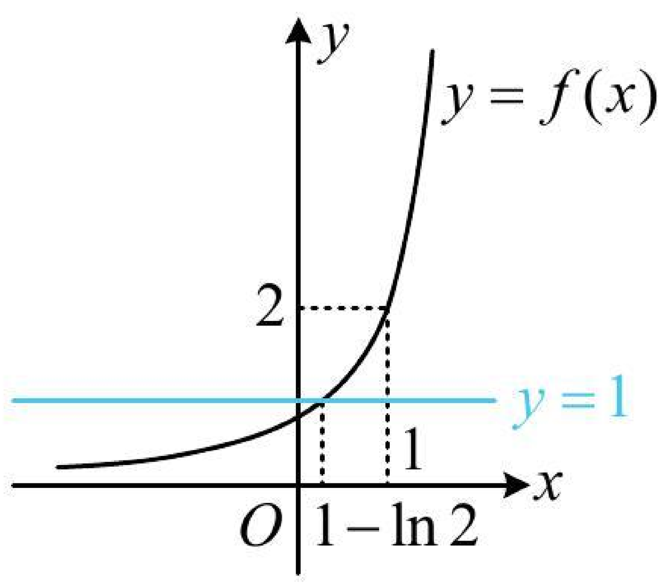

图2

2．（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|,x\le 1\\x^2-4x+3,x>1\end{cases}$，则不等式 $f(f(x))-f(x)+1\le 0$的解集为_____.

答案： $\{0\}\cup[2+\sqrt{2},2+\sqrt{5}]$

解析： $f(f(x))-f(x)+1$ 仍是复合结构，它由 $y=f(t)-t+1$ 和 $t=f(x)$ 复合而成，所以先换元，

设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))-f(x)+1\le 0$即为 $f(t)-t+1\le 0$，也即 $f(t)\le t-1$，

如图 1，$\begin{cases}y=t-1\\y=t^2-4t+3\end{cases}\Rightarrow t=1$或 4，由图可知不等式 $f(t)\le t-1\Leftrightarrow 1\le t\le 4$，所以$1\le f(x)\le 4$，

如图 2，$\begin{cases}y=1\\y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$，$\begin{cases}y=4\\y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=2+\sqrt{5}$ 或 $2-\sqrt{5}$，

由图可知，不等式$1\le f(x)\le 4$ 的解集为 $\{0\}\cup[2+\sqrt{2},2+\sqrt{5}]$.

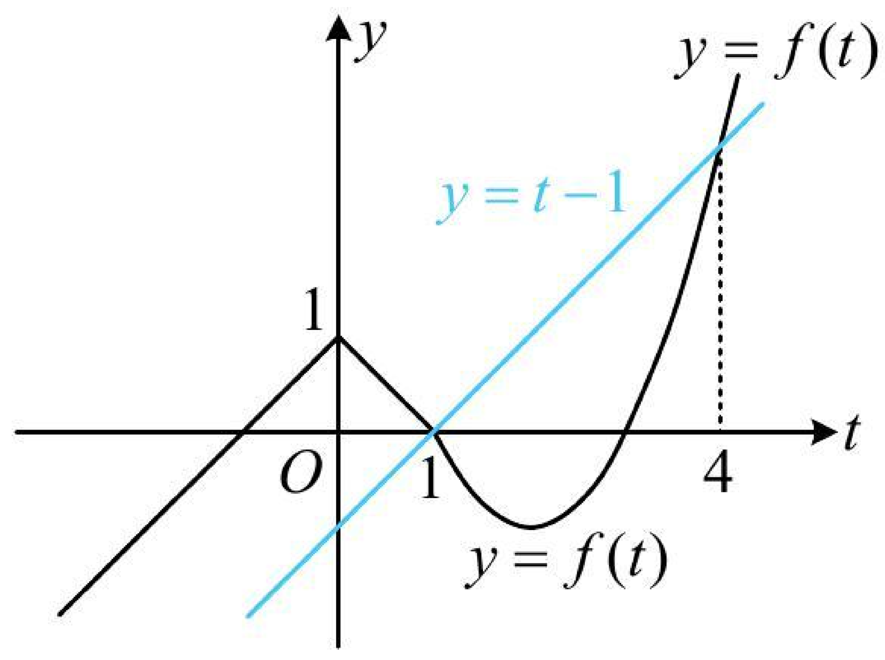

图1

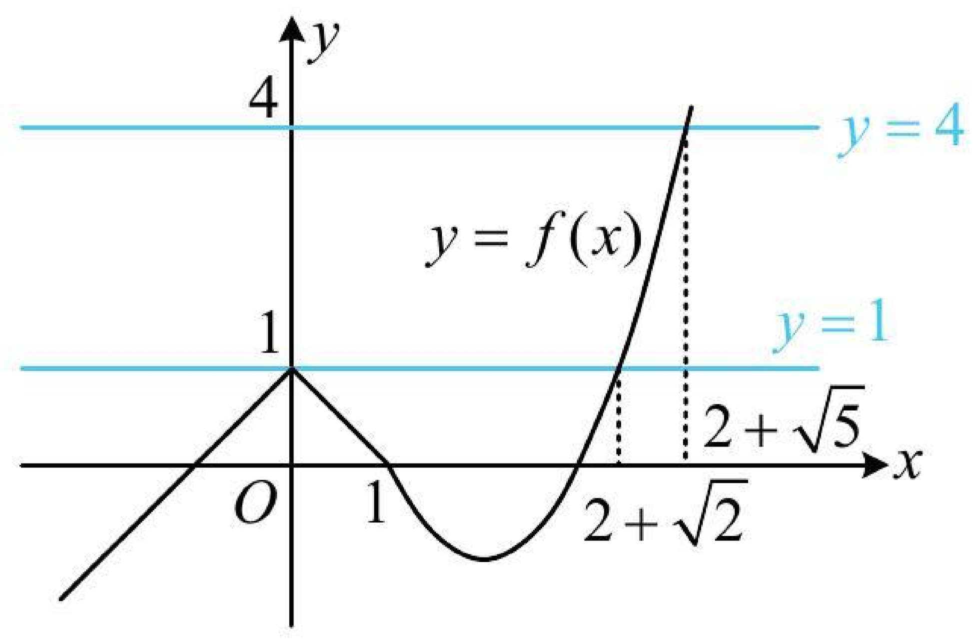

图2

3．（★★★）设 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1},x<1\\x^3+x-1,x\ge 1\end{cases}$， $g(x)=e^x-a(x+1)+1$，若 $f(g(x))\ge 1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $[0,1]$

解析： 先将 $f(g(x))\ge 1$ 内层的 $g(x)$ 换元，化整为零，设 $t=g(x)$，则 $f(g(x))\ge 1$ 即为 $f(t)\ge 1$，

函数 $y=f(t)$ 的图象好画，所以结合图象来看不等式 $f(t)\ge 1$ 的解，

如图 1，由图可知 $f(t)\ge 1 \Leftrightarrow t\ge 1$，所以 $g(x)\ge 1$，即 $e^x-a(x+1)+1\ge 1$，所以 $e^x\ge a(x+1)$，

如图 2，注意到曲线 $y=e^x$ 和直线 $y=x+1$ 相切，故当且仅当 $0\le a\le 1$ 时， $e^x\ge a(x+1)$ 恒成立.

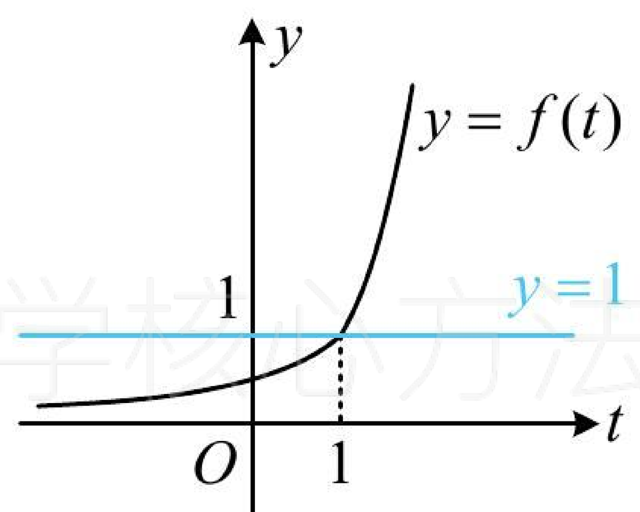

图1

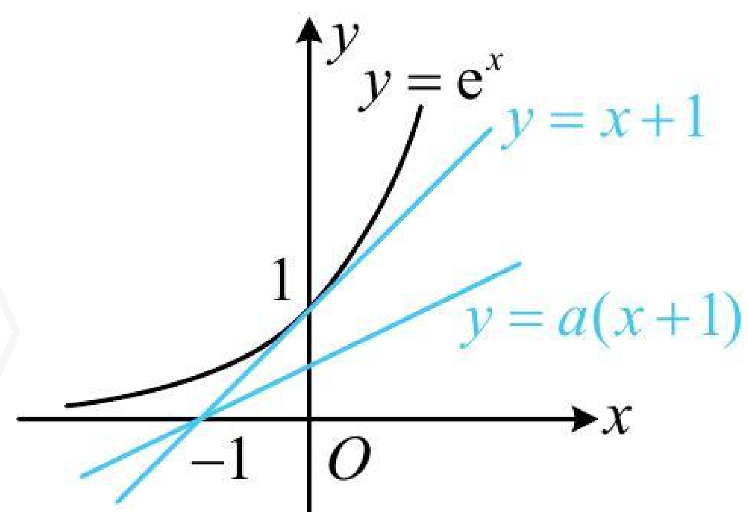

图2